Eine andere Dissertation über die Summen der aus den Potenzen der natürlichen Zahlen entspringenden Reihen, in welcher dieselben Summationen aus einer gänzlich anderen Quelle deriviert werden *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich vor einigen Jahren die Summen der in dieser allgemeinen Form enthaltenen Reihen

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc. ins Unendliche,}$$

wenn n eine gerade positive Zahl, und zugleich auch dieser Reihen, wenn n eine ungerade Zahl war,

*Originaltitel: “De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur“, erstmals publiziert in „*Miscellanea Berolinensia* 7 1743, pp. 172-192“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 138 - 155 “, Eneström-Nummer E61, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\text{etc. ims Unendliche}$$

mit Hilfe der Quadratur des Kreises dargeboten hatte und gezeigt hatte, dass die Summe immer durch dieselbe Potenz der Peripherie des Kreises ausgedrückt werden kann, welche der Exponent n anzeigt, gefiel dieses Argument den scharfsinnigsten Geometern dermaßen, dass sie es nicht nur im höchsten Maße billigten, sondern auch selbst viel Eifer und Mühe aufbrachten, um dieselben mit ihnen vertrauten Methoden zu finden. Ich bin zu dieser Zeit auch sehr stark davon eingenommen gewesen, einen anderen Weg ausfindig zu machen, der auf dasselbe führen würde, nicht nur um die gefundene Wahrheit noch mehr zu untermauern, sondern auch um die Grenzen der Analysis beim Behandeln von Reihen dieses Geschlechts weiter auszudehnen.

§2 Die Methode, die mich zu den Summationen dieser Reihen geführt hat, war selbstredend neu und bei einem Unterfangen solcher Art gänzlich unüblich; sie war nämlich auf die Auflösung einer unendlichen Gleichung gestützt, all deren Wurzeln, deren Anzahl unendlich war, bekannt sein mussten. Ich habe natürlich diese ins Unendliche laufende Gleichung betrachtet

$$x=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\frac{s^7}{5040}+\frac{s^9}{362880}-\text{etc.},$$

welche die Relation zwischen dem Kreisbogen s und seinem Sinus x enthält, nachdem der ganze Sinus $=1$ gesetzt worden ist. Weil aber demselben Sinus x unzählige so positive wie negative Bogen entsprechen, hatte ich auf diese Weise a posteriori unzählige Wurzeln dieser Gleichung erlangt; und weil ja die Koeffizienten einer jeden Gleichung von den Wurzeln abhängen, bin ich aus dem Vergleich dieser Koeffizienten mit den Wurzeln der Gleichung zu den Summen der zuvor erwähnten Reihen gelangt.

§3 Sofort habe ich freilich ohne Schwierigkeiten erkannt, dass diese Methode nur sicher ist und nur zur Wahrheit führen kann, wenn es richtig ist, dass jene Gleichung unendlichen Grades keine anderen Wurzeln außer denen, welche die Natur der Sinus mir an die Hand gegeben hatte, in sich umfasst.

Obgleich ich nämlich einsah, dass keine anderen reellen Wurzeln außer den angegebenen in jener Gleichung enthalten sind, war es dennoch mit Recht zu bezweifeln, ob nicht auch imaginäre enthalten waren; wenn dies der Fall gewesen wäre, hätte keine Summation, die ich daher gefunden habe, mit der Wahrheit einhergehen können. In diesem Zweifel wurde ich weiter bestätigt, weil ich auf die gleiche Weise aus einem Ellipsenbogen seinen Sinus oder seine entsprechende Ordinate durch eine Reihe ausgedrückt hatte; obwohl nämlich in gleicher Weise unzählige Ellipsenbogen vorhanden waren, die auf denselben Sinus bezogen werden, war es dennoch nicht möglich gewesen, aus ihnen Summen von Reihen, die mit der Wahrheit verträglich gewesen wären, abzuleiten; die Begründung dieses Umstandes war ohne Zweifel in den mehreren und vielleicht sogar unendlich vielen imagginären Wurzeln gelegen, die in jene aus der Ellipse gebildete Gleichung eingehen.

§4 Weil ich ja also zu jener Zeit einen Beweis besessen hatte, in welchem für mich sicher feststand, dass die Gleichung zwischen dem Kreisbogen s und seinem Sinus x von imaginären Wurzeln vollkommen frei ist, habe ich begonnen, die gefundenen Reihen auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu untersuchen; und freilich habe ich sofort entdeckt, dass diese Methode dieselbe Summe der Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\text{etc.}$$

liefert, die schon vor langer Zeit LEIBNIZ angegeben hatte, welche Übereinstimmung zur Genüge aufzeigte, wenn die Gleichung irgendwelche imaginären Wurzeln enthielte, dass deren Summe notwendigerweise $=0$ ist. Darauf habe ich die Reihen der höheren Potenzen so untersucht, dass ich die mit dieser Methode gefundenen Summen mit den Summen, welche ich ein wenig zuvor durch Approximation gefunden hatte, verglich, bei welcher Aufgabe ich erneut eine Übereinstimmung festgestellt habe. Und dieser Gründe wegen wurde ich vollkommen in der Ansicht bestärkt, dass jene Gleichung, die mich zu all jenen Summen geführt hatte, von überhaupt keinen imaginären Wurzeln besudelt wird; und so habe ich nicht bezweifelt, dass sie vollkommen wahre Summen hervorbringt.

§5 In dieser Meinung bestärkte mich dann aber eine andere lediglich analytische Methode, mit deren Hilfe ich darauf folgend allein durch Integrationen dieselbe Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

gefunden hatte, und fast auf die gleiche Weise hat der äußerst scharfsinnige Herr NIKOLAUS BERNOULLI in einem in Buch X. Comment. Acad. Petropol. enthaltenen Schediasmus dieselbe Summe bewiesen. Obwohl aber auf diese Weise das analytische Kalkül erschien, auf das Finden all derselben Summen übertragen werden zu können, habe dennoch weder ich noch hat irgendwer anderes mit der gleichen Rechnung zu höheren Potenzen gelangen können. Dies hat mich fast ganz dazu bewogen zu glauben, dass kein anderer Weg außer der Auflösung einer unendlichen Gleichung offensteht, der die Summen aller Potenzen zusammen beschaffen würde.

§6 Diese fast völlig vergessene Sorge haben neulich die vom hochgeehrten Herrn DANIEL BERNOULLI erhaltenen Briefe erneuert, in denen er mir dieselben Gründe zu zweifeln bezüglich meiner Methode entgegenbrachte und bedeutet, dass der hochgeehrte CRAMER von denselben Zweifeln befangen ist, dass er meine Methode billigen kann. Diese sehr freundschaftlichen Anmerkungen haben mich also dazu bewegt, dass ich die ganze Aufgabe von Neuem angehe und mich bemühe sowohl die Güte dieser Methode zu beweisen als auch einen anderen Weg zu finden, dieselben Reihen zu summieren. Bei jedem der beiden Unterfangen vollkommen in den Besitz des Gewünschten gekommen werde ich die zwei Aufgaben in dieser Dissertation lösen. Zuerst werde ich natürlich beweisen, dass in er oben erwähnten unendlichen Gleichung keine imaginären Wurzeln enthalten sind und sich daher über die daher Gültigkeit der daher abgeleiteten Summationen nicht weiter zweifeln lässt. An zweiter Stelle werde ich eine neue und nicht nur von der ersten vollkommen verschiedene, sondern auch eine ein Feld, um viele andere Dinge zu beleuchten, eröffnende Methode vorlegen, die allein durch Integrationregeln die Aufgabe löst.

§7 Den zuerst versprochenen Beweis habe ich aus der Auflösung dieses Binoms

$$a^n + b^n$$

in reelle Faktoren erhalten. Denn jeder einzelne Faktor ist in dieser Form enthalten

$$aa - 2ab\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n} + bb$$

und alle Faktoren werden erhalten, wenn anstelle von $2k - 1$ nacheinander alle ungeraden Zahlen, die kleiner als der Exponent n sind, eingesetzt werden; und wenn n eine ungerade Zahl war, dann muss außer diesen trinomialen Faktoren der einfache Faktor $a + b$ hinzugefügt werden. Wenn man daher diesen Rest hat

$$a^n - b^n,$$

ist zuerst ein einfacher Faktor von diesem $a - b$, die übrigen reellen trinomialen Faktoren sind in dieser Form enthalten

$$aa - 2ab\cos A\frac{2k\pi}{n} + bb$$

und alle Faktoren dieses Geschlechts werden erhalten, wenn anstelle von $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen (die Null ausgenommen), die kleiner als der Exponent n sind, geschrieben werden; und wenn n selbst eine gerade Zahl war, muss zusätzlich der einfache Faktor $a + b$ hinzugefügt werden. Auf diese Weise werden also ganz und gar alle reellen Faktoren der Formel

$$a^n \pm b^n$$

dargeboten werden können, das Produkt all welcher diese Formel selbst ergibt. Im übrigen ist es hier anzumerken, dass π den halben Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius $= 1$ ist, oder dass π der zwei rechten gleiche Winkel ist.

§8 Daher können wir nun a priori alle Wurzeln oder alle Faktoren dieses unendlichen Ausdruckes angeben

$$s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7} + \frac{s^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} - \text{etc.}$$

Diesem Ausdruck ist nämlich dieser gleichwertig

$$\frac{e^{s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

während e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, und weil gilt

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

während n eine unendliche Zahl ist, wird dieser vorgelegte unendliche Ausdruck auf diesen zurückgeführt werden

$$\frac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}},$$

von welchem einfacher Faktor als erstes s ist, welchen freilich die Betrachtung der Reihe selbst zeigt. Um die übrigen zu finden, vergleiche ich diesen Ausdruck mit der Form $a^n - b^n$; es wird sein

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n} \quad \text{und} \quad b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}$$

und daher

$$aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \quad \text{und} \quad 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn}.$$

Jeder beliebige Faktor wird also in dieser Form enthalten sein

$$2 - \frac{2ss}{nn} - 2\left(1 + \frac{ss}{nn}\right)\cos A\frac{2k\pi}{n}$$

und daher werden ganz und gar alle Faktoren ans Licht treten, wenn für $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen bis ins Unendliche eingesetzt werden, deshalb weil n eine unendliche Zahl bezeichnet.

§9 Weil aber n eine unendliche Zahl ist, wird der Bogen $\frac{2k\pi}{n}$ eine unendlich kleine Zahl sein, bis $2k$ auch eine unendliche Zahl wird, aber dennoch kleiner als n. Es wird also sein

$$\cos A\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn},$$

woher der allgemeine Faktor in diese Form übergeht

$$-\frac{4ss}{nn} + \frac{4kk\pi\pi}{nn},$$

woher, nachdem der konstante Term auf die Einheit reduziert worden ist, dieser Faktor entsprießt

$$1 - \frac{ss}{kk\pi\pi},$$

welcher, nachdem anstelle von k nacheinander alle Zahlen 1, 2, 3 etc. bis ins Unendliche eingesetzt worden sind, alle Faktoren liefert. Wenn daher aber k ins Unendliche übergeht, dass $2k$ zu n ein endliches Verhältnis annimmt, dann werden wegen

$$\cos A \frac{2k\pi}{n} < 1$$

die Terme $\frac{ss}{nn}$ in Bezug auf die nicht aufgehobene Einheit verschwinden und der Faktor $1 - \cos A \frac{2k\pi}{n}$ wird konstant werden und geht daher nicht in die Rechnung ein, weil in ihm der Bogen s nicht enthalten ist.

§10 Auf diese Weise haben wir also ganz und gar alle Faktoren der vorgelegten Formel erlangt

$$s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7} + \text{etc.},$$

welche daher dem aus diesen Faktoren bestehenden unendlichen Produkt exakt gleich sein wird

$$s\left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{ss}{16\pi\pi}\right)\text{etc.},$$

aus deren Vergleich mit den Koeffizienten der Terme der Reihe sofort die Summen der nachstehenden Reihen folgen

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \text{etc.},$$

wenn m irgendeine gerade Zahl bezeichnet, und daher kann über deren Gültigkeit nicht weiter gezweifelt werden.

§11 Wenn wir auf die gleiche Weise diese Reihe betrachten

$$1 - \frac{ss}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 6} + \frac{s^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8} - \text{etc.},$$

wird sie auf diese Form reduziert werden

$$\frac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2},$$

während n eine unendliche Zahl bezeichnet. Die Divisoren des Binoms

$$\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n$$

werden zugleich die Teiler der vorgelegten Reihe sein, und zwar alle. Nachdem diese Form mit $a^n + b^n$ verglichen worden ist, wird sein

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}, \quad b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}, \quad aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \quad \text{und} \quad 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn};$$

jeder einzelne Divisor der vorgelegten Formel ist also in diesem Ausdruck enthalten

$$2\left(1 - \frac{ss}{nn}\right) - 2\left(1 + \frac{ss}{nn}\right) \cos A \frac{(2k-1)\pi}{n}$$

oder in diesem

$$2\left(1-\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)-\frac{2ss}{nn}\left(1+\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}\right).$$

Weil aber im Teiler nur auf die Unbekannte geachtet wird, wird jeder beliebige Teiler von dieser Gestalt sein

$$1-\frac{ss\left(1+\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{nn\left(1-\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)},$$

nachdem der konstante Term der Einheit gleichgesetzt worden ist, weil ja in der Reihe selbst der erste Term $=1$ ist.

§12 Wegen der unendlichen Zahl n wird aber sein

$$1+\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}=2 \quad \text{und} \quad 1-\cos A\frac{(2k-1)\pi}{n}=\frac{(2k-1)^2\pi\pi}{2nn},$$

woher jeder einzelne Divisor von dieser Gestalt sein wird

$$1-\frac{2ss}{(2k-1)^2\pi\pi};$$

und wenn anstelle von $2k-1$ alle ungeraden Zahlen bis ins Unendliche eingesetzt werden, werden alle Teiler der vorgelegten Reihe entspringen, selbstredend von dieser

$$1-\frac{ss}{1\cdot 2}+\frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{s^6}{1\cdot 2\cdots 6}+\text{etc.},$$

welche also eine Produkt aus diesen an der Zahl unendlich vielen Faktoren sein wird, nämlich

$$\left(1-\frac{4ss}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4ss}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4ss}{25\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4ss}{49\pi\pi}\right)\text{etc.},$$

aus deren Vergleich mit der Reihe selbst alle Reihen der Potenzen summiert werden wie zuvor. Und so ist bewiesen worden, dass jene unendlichen Gleichungen, die ich zu jener Zeit behandelt habe, keine anderen Wurzeln auss̈ er denen haben, welche ich aus der Natur der Sinus und Kosinus a posteriori erhalten habe.

§13 Nach Nachweisen der Güte der Methode, mit deren Hilfe ich zuvor die Summen von reihen dieser Art angegeben habe, schreite ich nun dazu voran, eine andere von dieser völlig verschiedene Methode zu erklären, die allein aus den Prinzipien des Integralkalküls entnommen ohne jegliche Umwege mit wunderbarer Leichtigkeit die Summen derselben Reihen an die Hand gibt. Diese Methode ist aber auf zwei Lehrsätze gestützt, deren Bewies ich in der oberen Dissertation *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur* gegeben habe, woher ich sie auch ohne Beweis entnehme.
Der erste verhält sich so:

"Das so genommene Integral der Differentialformel

$$\frac{x^{p-1}+x^{q-p-q}}{1+x^q}dx,$$

dass es nach Setzen von $x=0$ verschwindet, wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird, wird diesen Wert geben

$$\frac{\pi}{q\sin A\frac{p\pi}{q}},$$

während π den halben Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius $= 1$ ist, in welchem Kreis ich festlege, dass zugleich der Bogen $\frac{p\pi}{q}$ genommen wird."

Der andere fast diesem fast gleiche Lehrsatz verhält sich so:

"Das so genommene Integral dieser Differentialformel

$$\frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx,$$

dass es nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, wenn in ihm nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, wird diesen Wert geben

$$\frac{\pi \cos A \frac{p\pi}{q}}{q \sin A \frac{p\pi}{q}} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{q \tan A \frac{p\pi}{q}}."$$

Die Beweise dieser Lehrsätze verlaufen vollkommen linear; zuerst habe ich nämlich gemäß der gewohnten Regeln die Integrale dieser Formeln allgemein ausfindig gemacht und nach Finden von diesen habe ich anstelle der Variable x die Einheit gesetzt. Danach bin ich zu einer endlichen Reihe von Sinus gelangt, die, weil die Bogen in einer arithmetischen Progression fortschritten, eine Summation zuließ und diese Ausdrücke lieferte.

§14 Wir wollen nun die erste Integralformel nehmen

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-q}}{1 + x^q} dx,$$

die in eine Reihe aufgelöst diese zwei geometrischen Progressionen liefert

$$\int dx(x^{p-1} - x^{q+p-1} + x^{2q+p-1} - x^{3q+p-1} + \text{etc.})$$
$$+ \int dx(x^{q-p-1} - x^{2q-p-1} + x^{3q-p-1} - x^{4q-p-1} + \text{etc.}).$$

Von dieser wird also das so angenommene Integral, dass es nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, so durch eine Reihe ausgedrückt werden

$$\frac{x^p}{p} + \frac{x^{q-p}}{q-p} - \frac{x^{q+p}}{q+p} - \frac{x^{2q-p}}{2q-p} + \frac{x^{2q+p}}{2q+p} + \frac{x^{3q-p}}{3q-p} - \text{etc.}$$

Wenn wir daher nun $x = 1$ setzen, wird durch den Lehrsatz von dieser Reihe

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q+p} - \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} + \frac{1}{3q-p} - \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc.}$$

die Summe sein

$$= \frac{\pi}{q \sin A \frac{p\pi}{q}}.$$

§15 Auf die gleiche Weise wird die andere Integralformel

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx$$

durch eine Reihe integriert geben

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^{q-p}}{q-p} + \frac{x^{q+p}}{q+p} - \frac{x^{2q-p}}{2q-p} + \frac{x^{2q+p}}{2q+p} - \frac{x^{3q-p}}{3q-p} + \text{etc.}$$

Deswegen wird durch den anderen Lehrsatz, wenn wir $x = 1$ setzen, die Summe von dieser Reihe

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q-p} + \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} - \frac{1}{3q-p} + \frac{1}{3q-p} - \text{etc.}$$

sein

$$= \frac{\pi \cos A \frac{p\pi}{q}}{q \sin A \frac{p\pi}{q}},$$

solange p und q positive Zahlen waren und zudem $q > p$ war, was im Folgenden auch immer angenommen werden muss; andernfalls verschwände nämlich das auf diese Weise genommene Integral nicht, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist.

§16 Es sei $\frac{p}{q} = s$; und nach Multiplizieren der gefundenen Reihen mit q werden wir diese zwei auf eine endliche Form reduzierten Reihen haben

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin As\pi} &= \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \text{etc.},\\
\frac{\pi \cos As\pi}{\sin As\pi} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Und die Summen von diesen Reihen werden wahr sein, welche Zahl auch immer durch die Zahl s angezeigt wird, ob rational oder irrational, und so wird das Kontinuitätsgesetz nicht weiter verletzt wie zuvor, wo anstelle von p und q ganze Zahlen angenommen werden mussten. Ja diese Summen weichen auch dann nicht von der Wahrheit ab, wenn für s größere Zahlen als die Einheit festgelegt werden. Wenn aber $s = 1$ oder jede beliebige ganze Zahl ist, dann werden die Summen wegen des entsprechenden einen ins Unendliche übergehenden Termes unendlich, zugleich werden aber die dargebotenen Summen wegen $\sin As\pi = 0$ ins Unendliche wachsen. Daher erstrecken sich diese Summen so weit, dass sie überhaput keine Einschränkung erfordern.

§17 Aus diesen allgemeinen Reihen werden nun die Reihen für die Quadratur des Kreis abgeleitet, sowohl die von LEIBNIZ als auch die von GREGORY und unzählige andere, von welchen es die besonderen hier darzubieten gefällt.

Es sei $q = 2$ und $p = 1$; es wird sein

$$\sin A\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \cos A\frac{\pi}{2} = 0$$

und daher entsprießen die folgenden Reihen

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

sowie

$$\frac{0\pi}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

von welchen jene die LEIBNIZ'sche Reihe ist, diese sich hingegen von selbst ergibt.

Es sei $q = 3$ und $p = 1$; es wird sein

$$\sin A\frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad \cos A\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

woher die folgenden Reihen entspringen

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.},$$
$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

Es sei $q = 4$, $p = 1$; es wird sein

$$\sin A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \cos A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und daher entstehen die folgenden Reihen

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc.},$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.},$$

Es sei $q = 6$, $p = 1$; es wird sein

$$\sin A\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \cos A\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

woher die folgenden Reihen ihren Ursprung nehmen

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{3} &= 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.},\\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.},\end{aligned}$$

Und all diese Reihen hatte auch die erste Methode an die Hand gegeben.

§18 Weil wir ja gesehen haben, dass die Summe von dieser Reihe

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \text{etc.}$$

ist

$$= \frac{\pi}{\sin A\pi s}$$

und von dieser

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \text{etc.}$$

ist

$$= \frac{\pi \cos A\pi s}{\sin A\pi s},$$

welcher Wert auch immer dem Buchstaben s zugeteilt wird, ist es offenbar, dass dieselben Gleichheiten auch Geltung ihre behalten, wenn anstelle von s der Ausdruck $s + ds$ gesetzt wird, oder, was auf dasselbe zurückgeht, wenn jene Reihen mit ihren Summen differenziert werden, nachdem die Größe s als Variable festgelegt worden ist. Daher, weil gilt

$$d \sin A\pi s = \pi ds \cos A\pi s \quad \text{und} \quad d \cos A\pi s = -\pi ds \sin A\pi s,$$

wird nach Nehmen der Differentiale und nachdem überall durch $-ds$ dividiert worden ist, sein

$$\begin{aligned}\frac{\pi\pi\cos A\pi s}{(\sin A\pi s)^2} &= \frac{1}{ss} - \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(3-s)^2} - \text{etc.},\\ \frac{\pi\pi}{(\sin A\pi s)^2} &= \frac{1}{ss} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{(3-s)^2} + \text{etc.},\end{aligned}$$

Wenn daher also anstelle von s wieder $\frac{p}{q}$ eingesetzt wird und auf beiden Seiten durch pp geteilt wird, werden die folgenden summierten Reihen hervorgehen

$$\begin{aligned}\frac{\pi\pi\cos A\frac{p\pi}{q}}{qq\left(\sin A\frac{p\pi}{q}\right)^2} &= \frac{1}{pp} - \frac{1}{(q-p)^2} - \frac{1}{(q+p)^2} + \frac{1}{(2q-p)^2} + \frac{1}{(2q+p)^2} - \text{etc.},\\ \frac{\pi\pi}{qq\left(\sin A\frac{p\pi}{q}\right)^2} &= \frac{1}{pp} + \frac{1}{(q-p)^2} + \frac{1}{(q+p)^2} + \frac{1}{(2q-p)^2} + \frac{1}{(2q+p)^2} + \text{etc.}\end{aligned}$$

§19 Wir wollen festlegen, dass $q=2$ und $p=1$ ist; es wird $\sin A\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos A\frac{\pi}{2} = 0$ sein, woher die folgenden Reihen hervorgehen werden

$$\begin{aligned}0 &= 1 - 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{etc.}\\ \frac{\pi\pi}{4} &= 1 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.},\end{aligned}$$

von welchen die Gültigkeit der ersten per se klar ist, die zweite aber hierauf zurückgeht

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}$$

Es sei $q = 3$ und $p = 1$; es wird $\sin A\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos A\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ sein, woher diese zwei Reihen entsprießen werden

$$\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} + \text{etc.},$$
$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc.}$$

Es sei $q = 4$ und $p = 1$; es wird $\sin A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos A\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und daher werden diese zwei Reihen entspringen

$$\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \text{etc.},$$
$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

Es sei $q = 6$ und $p = 1$; es wird $\sin A\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und $\cos A\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, in welchem Fall diese Reihen erhalten werden werden

$$\frac{\pi\pi}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + \text{etc.},$$
$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}$$

Und aus diesen zwei Reihen werden ohne Schwierigkeit jene zwei besonderen deriviert, welche ich mit der vorhergehenden Methode von dieser Art gefunden habe, selbstredend

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.},$$
$$\frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{etc.}$$

§20 Damit leichter die Summen der höheren Potenzen durch Differentiation gefunden werden können, wollen wir die Summen und die Reihen einzeln differenzieren. Es sei also

$$\frac{\pi}{\sin A\pi s} = P \quad \text{und} \quad \frac{\pi \cos A\pi s}{\sin As} = Q$$

und wir werden die folgenden durch die Differentiale eines jeden Grades von P und Q ausgedrückten Summationen haben

$$
\begin{aligned}
+P &= \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \text{etc.},\\
+Q &= \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-dP}{1ds} &= \frac{1}{ss} - \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(3-s)^2} - \text{etc.},\\
\frac{-dQ}{1ds} &= \frac{1}{ss} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{(3-s)^2} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-ddP}{1\cdot 2ds^2} &= \frac{1}{s^3} + \frac{1}{(1-s)^3} - \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} + \frac{1}{(3-s)^3} - \text{etc.},\\
\frac{-ddQ}{1\cdot 2ds^2} &= \frac{1}{s^3} - \frac{1}{(1-s)^3} + \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} - \frac{1}{(3-s)^3} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-d^3P}{1\cdot 2\cdot 3ds^3} &= \frac{1}{s^4} - \frac{1}{(1-s)^4} - \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} - \frac{1}{(3-s)^4} - \text{etc.},\\
\frac{-d^3Q}{1\cdot 2\cdot 3ds^3} &= \frac{1}{s^4} + \frac{1}{(1-s)^4} + \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} + \frac{1}{(3-s)^4} + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Allgemein wird man also diese Summation haben

$$
\begin{aligned}
\frac{\pm d^{n-1}P}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)ds^{n-1}} &= \frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc.},\\
\frac{\pm d^{n-1}Q}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)ds^{n-1}} &= \frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn n eine ungerade Zahl war, die unteren hingegen, wenn n eine gerade Zahl ist.

§21 Um also diese Summen tatsächlich zu bestimmen, ist es notwendig, dass wir die Werte der Differentiale irgendeiner Ordnung der Größen P und Q finden; damit die leichter und schneller geschehen kann, wollen wir setzen

$$\sin A\pi s = x \quad \text{und} \quad \cos A\pi s = y$$

und es wird sein

$$P = \frac{\pi}{x} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\pi y}{x}.$$

Weiter wird aber sein

$$dx = \pi y ds \quad \text{und} \quad dy = -\pi x ds,$$

woher durch die Differentiationsregeln die folgenden Werte erhalten werden

$$\begin{aligned}
+P &= \frac{\pi}{x}\,, \\
-\frac{dP}{ds} &= \frac{\pi^2}{x^2}\cdot y \\
+\frac{ddP}{ds^2} &= \frac{\pi^3}{x^3}\,(y^2+1), \\
-\frac{d^3P}{ds^3} &= \frac{\pi^4}{x^4}\,(y^3+5y), \\
+\frac{d^4P}{ds^4} &= \frac{\pi^5}{x^5}\,(y^4+18y^2+5), \\
-\frac{d^5P}{ds^5} &= \frac{\pi^6}{x^6}\,(y^5+58y^3+61y), \\
+\frac{d^6P}{ds^6} &= \frac{\pi^7}{x^7}\,(y^6+179y^4+479y^2+61), \\
-\frac{d^7P}{ds^7} &= \frac{\pi^8}{x^8}\left(y^7 \begin{matrix} +6\cdot 1 \\ +3\cdot 179 \end{matrix}\; y^5 \begin{matrix} +4\cdot 179 \\ +5\cdot 479 \end{matrix}\; y^3 \begin{matrix} +2\cdot 479 \\ +7\cdot 61 \end{matrix}\; y \right)
\end{aligned}$$

etc.,

aus dem letzten welcher Ausdrücke zugleich das Bildungsgesetz klar wird, mit dessen Hilfe aus dem Differential einer jeden Ordnung das Differential der folgenden Ordnung gebildet werden kann. Und daher wird die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc.}$$

für jeglichen Wert des Exponenten n leicht angeben werden.

§22 Auf die gleiche Weise werden die Werte der Differentiale irgendeiner Ordnung der anderen Größe Q aufgefunden werden

$$\begin{aligned}
+Q &= \frac{\pi}{x} \cdot y, \\
-\frac{dQ}{ds} &= \frac{\pi^2}{x^2} \cdot 1 \\
+\frac{ddP}{ds^2} &= \frac{\pi^3}{x^3} \cdot 2y, \\
-\frac{d^3Q}{ds^3} &= \frac{\pi^4}{x^4}\,(4yy+2), \\
+\frac{d^4Q}{ds^4} &= \frac{\pi^5}{x^5}\,(8y^3+16y), \\
-\frac{d^5Q}{ds^5} &= \frac{\pi^6}{x^6}\,(16y^4+88y^2+16), \\
+\frac{d^6Q}{ds^6} &= \frac{\pi^7}{x^7}\,(32y^5+416y^3+272y), \\
-\frac{d^6Q}{ds^6} &= \frac{\pi^8}{x^8}\,(64y^6+1824y^4+2880y^2+272), \\
+\frac{d^8P}{ds^8} &= \frac{\pi^9}{x^9}\left(2\cdot 64y^7 \quad \begin{matrix} +4\cdot 1824 \\ +6\cdot 64 \end{matrix}\; y^5 \quad \begin{matrix} +6\cdot 2880 \\ +4\cdot 1824 \end{matrix}\; y^3 \quad \begin{matrix} +8\cdot 272 \\ +2\cdot 2880 \end{matrix}\; y \right)
\end{aligned}$$

$$\text{etc.,}$$

Hier tritt das Fortschreitungsgesetz in gleicher Weise klar zu tage, mit dessen

Hilfe, sich so weit wie es beliebt fortschreiten lässt; und daher wird die Summe jeder Reihe der Potenzen dargeboten werden können, die in dieser Form enthalten ist

$$\frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} + \text{etc.}$$

In diesen Reihen sind aber nicht nur alle Reihen der Potenzen enthalten, welche die vorhergehende Methode an die Hand gegeben hatte, sondern darüber hinaus auch unzählige andere. Ja diese Methode selbst scheint sogar geeignet, um viele andere wunderschöne Dinge zu finden.